３．ラプラス変換

ラプラス変換は連続時間信号処理システムの解析において最も重要なものである。これは図１のように微分方程式の解を代数的に解けるだけでなく、システムの時間応答特性や周波数応答特性、安定性などを簡潔に表現できる。

3.1 ラプラス変換

連続時間信号 x(t)のラプラス変換 X(s)は、

$$X(s)=\int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt \qquad (3.1.1)$$

で与えられる。ここで s は複素数である。(3.1.1)式が成立する s の範囲を収束領域という。

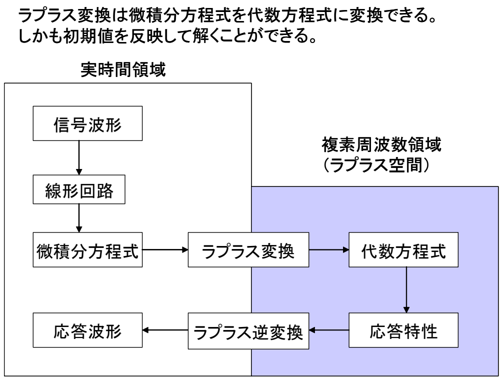

図１ラプラス変換･ラプラス逆変換の機能

例

$$x(t)=e^{-bt}u(t)\leftrightarrow X(s)=\int_0^{\infty} e^{-(s+b)t}dt$$ の場合は $$X(s)=-\frac{1}{s+b}e^{-(s+b)t}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty}$$

を評価する必要がある。ここで $s=\sigma+j\omega$ と置くと、$\lim_{t\to\infty} e^{-(\sigma+b+j\omega)t}$ であるから

$\sigma+b>0$ であればこの極限は 0 となるので、$X(s)=\dfrac{1}{s+b}$ となる。この場合の収束領域は Re(s)>-b である。

多くの応用において少なくとも収束領域が存在すれば問題は生じない。

3.2 ラプラス変換の性質

代表的な関数に対するラプラス変換を求める。

(1) 単位ステップ関数

単位ステップ関数 u(t)はある回路系にスイッチを閉じて一定電圧を加える場合などに用いられる。(3.1.1)式を用いて

$$F(s)=\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty 1\cdot e^{-st}dt=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{t=0}^{t=\infty}=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)+\frac{1}{s}=\frac{1}{s}$$

(3.2.1)

ここで、Re(s)>0 としている。したがって　単位ステップ関数 u(t)のラプラス変換対は

$$u(t)\Leftrightarrow\frac{1}{s}$$

となる。

(2) 単位インパルス関数

単位インパルス関数はシステムの固有な性質を表すシステム関数を求める場合などに用いられる。単位インパルス関数は

$$\delta(t)=\begin{cases}1;t=0\\0;t\neq 0\end{cases}$$

従って、 $F(s)=\int_0^\infty \delta(t)e^{-st}dt=\delta(0)e^{-s\cdot 0}=\delta(0)=1$ (3.2.2)

ラプラス変換対は

$$\delta(t)\Leftrightarrow 1$$

(3) 指数関数的波形

指数関数的波形は e^{at} と表される。ラプラス変換は、

$$F(s)=\int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_{t=0}^{t=\infty}=\frac{1}{s-a}$$

(3.2.3)

ラプラス変換対は

$$e^{at}\Leftrightarrow\frac{1}{s-a}$$

(4) 正弦波・余弦波

指数関数が求められたのでこれを用いて正弦波・余弦波の変換を求めてみよう。

$e^{\pm j\omega t} = \cos\omega t \pm j\sin\omega t$ であるから、

$$\cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}, \quad \sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

ラプラス変換 $L[\cos\omega t] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ (3.2.4a)

同様に $L[\sin\omega t] = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ (3.2.4b)

ラプラス変換対は

$$\cos\omega t \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \qquad \sin\omega t \Leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

(5) 時間をずらした波形

ある時間波形 f(t)=g(t)u(t) を時間 T 遅らせたときの波形を k(t) とすると $k(t) = g(t - T)u(t - T)$ となる。従ってラプラス変換は、

$$K(s) = \int_0^\infty g(t - T)u(t - T)e^{-st}dt = \int_T^\infty g(t - T)u(t - T)e^{-st}dt \because u(t - T) = 0,\ when\ t < T$$

$\tau = t - T$ の変換により、

$$= \int_0^\infty g(\tau)u(\tau)e^{-s(\tau+T)}d\tau = e^{-sT}\int_0^\infty g(\tau)u(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-sT}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-sT}F(s)$$

(3.2.5)

したがって時間を T 遅らせるという時間領域での処理はラプラス変換では波形 f(t)のラプラス変換に e^{-sT} をかけることに相当する。

$t \rightarrow t-T \Leftrightarrow e^{-sT}$ をかける

この演算はアナログ信号(時間連続)とディジタル信号（時間離散）の橋渡しをする上で重要である。

インパルス	$\delta(t)$	1
ステップ	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
ランプ	t	$\frac{1}{s^2}$
指数	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
サイン	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
コサイン	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
	$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
	$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

図 2　代表的な関数のラプラス変換

(6) 微分

微分演算のラプラス変換は部分積分の公式より

部分積分の公式

$\int f(x)dx = F(x)$ とすると

$$\int f(x)\cdot g(x)dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)dx$$

$$K(s) = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt = \left[f(t)e^{-st}\right]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty f(t)\frac{d}{dt}\left(e^{-st}\right)dt$$

$$= \lim_{t\rightarrow\infty}\left(f(t)e^{-st}\right) - f(0) - \int_0^\infty f(t)\left(-se^{-st}\right)dt$$

したがって、 $K(s) = -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0)$ (3.2.6)

ここで、f(0)とは t=0 における f の値で、初期値と呼ばれる。ラプラス変換対は、

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow sF(s) - f(0)$$

その他２次・３次の微分は、

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \Leftrightarrow s^2 F(s) - sf(0) - f^{'}(0)$$

$$\frac{d^3 f(t)}{dt^3} \Leftrightarrow s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf^{'}(0) - f^{''}(0)$$

となる。

一般的な n 次微分は

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \Leftrightarrow s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$$

(3.2.7)

で表される。

変数	t	s
関数	$f(t)$	$F(s)$
線形性	$Af_1(t)+Bf_2(t)$	$AF_1(s)+BF_2(s)$
積分	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$
微分	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0-)$
	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s)-sf(0-)-f^{'}(0-)$
	$\frac{d^3 f(t)}{dt^3}$	$s^3F(s)-s^2 f(0-)-sf^{'}(0-)-f^{''}(0-)$

図３　微積分におけるラプラス変換

(7) 積分

積分演算は、

$$K(s) = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)dt \right] e^{-st} dt$$

部分積分の公式を適用して、

$$= -\frac{e^{-st}}{s} \int_0^t f(t)dt \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \frac{F(s)}{s} \quad (3.2.8)$$

ラプラス変換対は

$$\int_0^t f(t)dt \Leftrightarrow \frac{F(s)}{s}$$

問題：次の関数をラプラス変換せよ。

(1) $f(t) = e^{-3t}$

(2) $f(t) = 2\sin t + \cos t$

答え：

(1) $F(s) = \frac{1}{s+3}$

(2) $F(s) = \frac{s+2}{s^2+1}$

3.3 ラプラス逆変換

理論的にはラプラス逆変換は複素積分 $f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$ で与えられるが、実際的には部分分数展開を用いて求められる。s による関数は以下のように分子・分母に多項式をもつ関数で書き表せる。

$$N(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m} \quad (3.3.1)$$

従って、z_i を分子の多項式の根（これをゼロと呼ぶ)、p_j を分母の多項式の根（これをポールと呼ぶ）とすると上式は

$$N(s) = H\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_m)} \quad (3.3.2)$$

と表される。ここで、H は係数である。
（ポールとゼロはシステムの特性を表す重要な概念である）

ヘビサイドの展開定理よりこれは以下のように展開できることが分かっている。

$$N(s)=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{K_n}{s-p_n}\quad ;$$

$$K_i=\left[(s-s_i)\cdot N(s)\right]_{s=s_i}\text{, i=0,1, 2,.., n}\qquad (3.3.3)$$

ここで、K_i は留数と呼ばれる。したがって、ラプラス逆変換は、

$$x(t)=K_1e^{p_1t}+K_2e^{p_2t}+\cdots+K_ne^{p_nt},\quad t\geq 0$$

となる。

問題：以下のラプラス変換表現を有する F(s)を時間領域の関数に逆変換せよ。

$$F(s)=\frac{s+11}{s^2+7s+10}$$

答え：

$$f(t)=\left\{3e^{-2t}-2e^{-5t}\right\}u(t)$$

重根を持つ場合は厄介で、r 個の重根と n-r 個の単極を持つ場合は

$$N(s)=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{(s-p_1)^2}+\cdots+\frac{K_r}{(s-p_1)^r}+\frac{K_{r+1}}{s-p_{r+1}}+\cdots+\frac{K_n}{s-p_n}\quad (3.3.4)$$

単極の留数は(3.3.3)と同様であるが、多重極の留数 K_r は

$$K_r = \left[(s-p_1)^r N(s)\right]_{s=p_1}$$

$$K_{r-i} = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{ds^i}\left\{(s-p_i)^r N(s)\right\}\right]_{s=p_1}, \quad i=1,2,\ldots,r-1 \qquad (3.3.5)$$

より求まり、逆ラプラス変換は、

$$f(t)=\left\{K_1+K_2\frac{t}{1!}+\cdots+K_r\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\right\}e^{p_1 t}+K_{r+1}e^{p_2 t}+\cdots+K_n e^{p_n t} \qquad (3.3.6)$$

となる。

これでは分かりにくいので例を挙げる。

問題：$F(s)=\dfrac{5s^2+2s+4}{(s-1)^2(s+2)}$ をラプラス逆変換せよ

答え：

$F(s)=\dfrac{K_1}{s-1}+\dfrac{K_2}{(s-1)^2}+\dfrac{K_3}{(s+2)}$ と展開できる。各係数を求め、ラプラス逆変換する。

$$K_2=(s-1)^2\left.\frac{5s^2+2s+4}{(s-1)^2(s+2)}\right|_{s=1}=\frac{11}{3}$$

$$K_1=\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left.\left\{(s-1)^2\frac{5s^2+2s+4}{(s-1)^2(s+2)}\right\}\right|_{s=1}=\frac{25}{9}$$

$$K_3=(s+2)\left.\frac{5s^2+2s+4}{(s-1)^2(s+2)}\right|_{s=-2}=\frac{20}{9}$$

$$\therefore f(t)=\frac{25}{9}e^t+\frac{11}{3}te^t+\frac{20}{9}e^{-2t}$$

簡単な重根でもかなり複雑な計算となる。

3.4 微分方程式への応用

ｎ階線形微分方程式は

$$b_n \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = x(t)$$

であるので、(3.2.7)の微分定理を用いて両辺のラプラス変換をとると、

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \left\{ s^k Y(s) - \sum_{r=1}^{k} s^{k-r} y^{(r-1)}(0) \right\} = X(s) \quad (3.4.1)$$

ここで、

$$\sum_{k=0}^{n} b_k s^k = B(s) \quad (3.4.2a)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{r=1}^{k} b_k y^{(r-1)}(0) s^{k-r} = C(s) \quad (3.4.2b)$$

とおくと、(3.4.1)式は

$$B(s)Y(s) = X(s) + C(s) \quad (3.4.3)$$

なので、

$$Y(s) = \frac{X(s)}{B(s)} + \frac{C(s)}{B(s)} \quad (3.4.4)$$

したがって(3.4.1)式の微分方程式の解は(3.4.4)式のラプラス逆変換として求めることができる。
L^{-1} をラプラス逆変換とすると、

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{X(s)}{B(s)}\right] + L^{-1}\left[\frac{C(s)}{B(s)}\right] \quad (3.4.5)$$

この逆変換は(3.3.3)に示したヘビサイドの展開定理によって求めることができるが、その際

B(s)=0

なる方程式の根を求めることが必要である。微分方程式の解の性質はこの方程式の根によって支配され、この方程式は特性方程式と呼ばれる。

問題：次の方程式を解け。

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 4u(t)$$ ただし　y(0)=1, y'(0)=0

答え：
両辺のラプラス変換をとると、

$$\left(s^2 + 3s + 2\right)Y(s) = \frac{4}{s} + sy(0) + y'(0) + 3y(0) = \frac{4}{s} + s + 3$$

したがって、$Y(s) = \dfrac{4}{s\left(s^2 + 3s + 2\right)} + \dfrac{s+3}{s^2 + 3s + 2} = \dfrac{4}{s(s+1)(s+2)} + \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

展開定理より、

$$L^{-1}\left\{\frac{4}{s(s+1)(s+2)}\right\} = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}, \quad L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right\} = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

したがって、

$$y(t) = 2 - 2e^{-t} + e^{-2t}$$

と求められる。

信号システム解析

宿題 2005年5月2日出題（紙面がないので、結果のみを記すこと）

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問１：以下のラプラス逆変換を行え。

$$(1)\quad F(s)=\frac{2s+5}{(s+1)(s+4)}$$

$$(2)\quad F(s)=\frac{s+1}{(s+2)^2(s+3)}$$

$$(3)\quad F(s)=\frac{1}{(s-2)(s^2-2s+2)}$$

問２：以下の微分方程式をラプラス変換を用いて解け。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}+2y=0$　　$(t=0$のとき　$y=0, y'=1)$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+4\dfrac{dy}{dt}=\sin t$　　$(t=0$のとき　$y=y'=0)$

(3) $\dfrac{d^3y}{dt^3}+\dfrac{dy}{dt}=e^{3t}$　　$(t=0$のとき　$y=y'=y''=0)$